

Varianta 31

Subiectul I

- a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow$ punctele A, B, C sunt necoliniare.
- b) $AC = BC = \sqrt{13}$, deci triunghiul ABC este isoscel.
- c) M este mijlocul segmentului $[AB] \Rightarrow M(0,1)$.
- d) $CM = 3$.
- e) $S_{ABC} = 6$.
- f) $\overline{3+5i} = 3-5i$.

Subiectul II

1.

a) $r = f(1) = 0$.

b) $x = 2$.

c) $A_4^2 = 12$.

d) $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

e) $x \in \{-1, 1\}$.

2.

a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, deci șirul $(a_n)_n$ este crescător.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

c) $f'(x) = \cos x$.

d) $\int_0^{\pi} f'(x) dx = 0$.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$.

Subiectul III

a) Evident A comută cu A , deci $A \in G$, iar $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, deci $I_2 \in G$.

b) $\det A = 1$.

c) $A^2 = -I_2$.

d) $A^2 X = X A^2 = -X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$.

- e) $BA = (aI_2 + bA)A = aA + bA^2 \stackrel{c)}{=} aA - bI_2$.
- $AB = A(aI_2 + bA) = aA + bA^2 \stackrel{c)}{=} aA - bI_2$, deci $AB = BA$, adică $B \in G$.
- f) $A^{4k} = (A^4)^k \stackrel{c)}{=} (I_2)^k = I_2, \forall k \in \mathbf{N}^*$.
- g) Avem $A + A^2 + A^3 + A^4 = A - I_2 - A + I_2 = O_2$.
- Atunci $A + A^2 + \dots + A^{2007} \stackrel{f)}{=} 501(A + A^2 + A^3 + A^4) + A + A^2 + A^3 =$
 $= 501 \cdot O_2 + A - I_2 - A = -I_2$. Deci $\det(A + A^2 + \dots + A^{2007}) = \det(-I_2) = 1$.

Subiectul IV

- a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.
- c) Dacă $x \leq 0$, atunci $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$, deci funcția f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$. Atunci ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 1$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - 1) \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2 + 1} = -1$.
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n))^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2 + 1}} = e^{-1}$.
- g) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.